CC1 - 2023

Exercice 1 (7)

$$\vec{E} = E_0(\vec{e_x} + \vec{e_y})$$

1°) En tout point M (x, y, z), le module du champ est le même et l'orientation du champ est fixe. Le champ $\vec{E}$ est donc partout identique on dit qu'il est uniforme. (0,5)

2°) $\|\vec{E}\| = E_0\sqrt{2}$ (0,5)

3°) sur $\overline{OA_1}$: $\vec{dl} = dx\,\vec{e_x}$; $dC = E_0\,dx$ et donc $C_{\overline{OA_1}} = E_0\int_0^a dx = E_0 . a$ (0,5)

sur $\overline{A_1A_2}$: $\vec{dl} = dz\,\vec{e_z}$; $\vec{dl} \perp \vec{E}$ donc $dC = 0$ donc $C_{\overline{A_1A_2}} = 0$ (0,5)

sur $\overline{A_2A}$: $\vec{dl} = dy\,\vec{e_y}$; $dC = E_0\,dy$ et donc $C_{\overline{A_2A}} = E_0 . a$ (0,5)

$$C_{OA_1A_2A} = E_0 . a + 0 + E_0 . a = 2E_0 . a \quad (0{,}5)$$

4°) $\vec{dl} = dx\,\vec{e_x} + dx\,\vec{e_y} + dx\,\vec{e_z}$ afin de suivre la direction $\overrightarrow{OA}$ (1)

5°) $dC = E_0\,dx + E_0\,dx = 2E_0\,dx$ et donc $C_{\overline{OA}} = 2E_0\int_0^a dx = 2E_0 . a$ (1)

6°) si V était uniforme ses variations dans l'espace seraient nulles et donc son gradient serait le vecteur nul, le champ $\vec{E}$ serait donc nul $\vec{E} = \vec{0}$. Or $\vec{E}$ est uniforme mais $\neq \vec{0}$ (1) donc V n'est pas un champ de scalaire uniforme.

7°) $$C_{OA} = \int_0^A \vec{E}.\vec{dl} = -\int_0^A \overrightarrow{\text{grad}}\,V.\vec{dl} = -\int_0^A dV = V(0) - V(A) \quad (1)$$

Exercice 2

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\,e^{-r/a}$$

1°) a est homogène à une longueur car on calcule l'exponentielle d'un nombre pur donc $\frac{r}{a}$ est sans dimension. (1)

2°)
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial r} \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\right)\cdot\left(e^{-r/a}\right)\cdot\left(-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{ra}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\,e^{-r/a}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1)

Le module de $\vec{E}$ est égal à $\|\vec{E}\| = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\,e^{-r/a}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)$; son orientation est radiale il est colinéaire au vecteur unitaire $\vec{e_r}$.

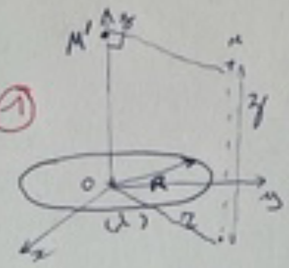
(1)

3°) $\vec{E}$ et V ne dépendent que de r ; ces deux grandeurs possèdent donc une symétrie sphérique. Le système de charges qui les a générées est également à symétrie sphérique il exhibe donc une invariance par toute rotation autour de O ; et également par toute rotation autour de z.

Les réponses sont donc
NON - si on change z, on change r et donc $\vec{E}$, V changent (0,5)
NON - si on change r, $\vec{E}$ et V changent. (0,5)
OUI - si on change φ, $\vec{E}$ et V ne changent pas. (0,5)
OUI - si on change θ, $\vec{E}$ et V ne changent pas. (0,5)

Exercice 3

1°)



(1)

2°) invariance par toute rotation autour de l'axe z. C'est la seule. donc système de coordonnées cylindriques (1)

$$\vec{E}\begin{pmatrix} E_r(r,z) \\ E_\theta(r,z) \\ E_z(r,z) \end{pmatrix}$$ (1)

3°) Le plan contenant M et l'axe z est un plan de symétrie du système donc $\vec{E}(M) \in$ à ce plan

donc $E_\theta = 0$ $\quad \vec{E}(M)\begin{pmatrix} E_r(r,z) \\ 0 \\ E_z(r,z) \end{pmatrix}$ (2)

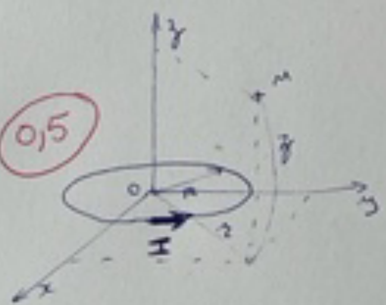
4°) Tous les plans contenant l'axe z sont des plans de symétrie du système. Tous ces plans contiennent le point M' situé sur l'axe. Donc au point M' $\vec{E}(M') \in$ à tous ces plans. Il est donc orienté suivant leur intersection commune, c'est à dire selon l'axe (O,z).

donc $E_r = 0$; $E_\theta = 0$ et $\vec{E}(M')\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z(z) \end{pmatrix}$ (2)

5°) Le plan (x,O,y) contenant l'anneau est un plan de symétrie du système. mais O (1)
Le point O est sur l'axe z donc $E_r(O) = 0$ et $E_\theta(O) = 0$ (voir question 4), mais O
est dans le plan (x,O,y) donc $\vec{E}(O) \in (x,O,y)$ donc $E_z(O) = 0$. Donc au final $\vec{E}(O) = \vec{0}$

Exercice 4

1°)



(0,5)

2°) Invariance par toute rotation autour de l'axe z. C'est la seule. donc syst. de coord. cylindrique

$$\vec{B}\begin{pmatrix} B_r(r,z) \\ B_\theta(r,z) \\ B_z(r,z) \end{pmatrix}$$ (0,5)

3°) Le plan contenant M et l'axe z est désormais un plan d'antisymétrie. D'un côté de ce plan le courant arrive, de l'autre côté il part.

$\vec{B}$ est un pseudo vecteur donc $\vec{B} \in$ à ce plan.

donc $B_\theta = 0$

donc $\vec{B}(M)\begin{pmatrix} B_r(r,z) \\ 0 \\ B_z(r,z) \end{pmatrix}$ (1)

NB en M' $\vec{B}(M')\begin{pmatrix} B_r = 0 \\ 0 \\ B_z(z) \end{pmatrix}$ mais en O $\vec{B}(O)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(z) \end{pmatrix}$ car $\vec{B} \perp$ au plan de symétrie tel que le plan (x,O,y)